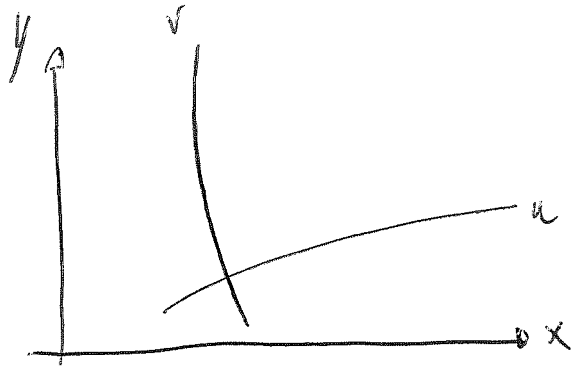
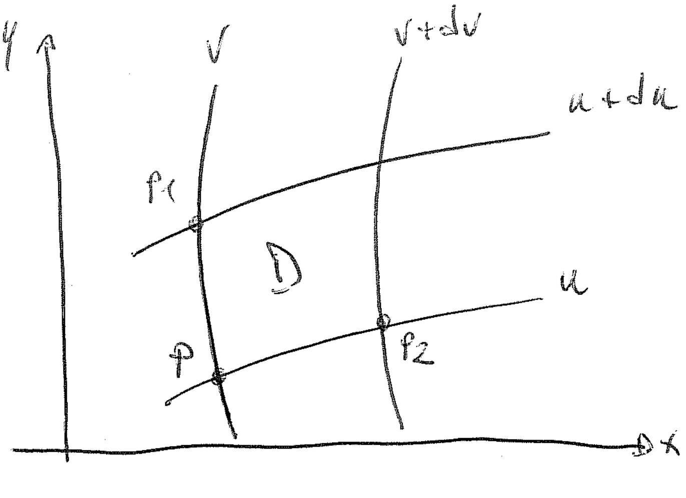
$$\begin{cases} x = \varphi_1(\text{cost}, v) \\ y = \varphi_2(\text{cost}, v) \end{cases} \qquad (u = \text{cost})$$

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, \text{cost}) \\ y = \varphi_2(u, \text{cost}) \end{cases} \qquad (v = \text{cost})$$



TERZA LEZIONE (21/03/17)

Aggiungiamo un "pezzettino" ad u ed a v:



Chiamiamo D la regione interna

DOMINIO INFINITESIMO

Chiamiamo x, y le coordinate di P

$\Rightarrow P(x, y)$

P_1 è il punto P che si muove lungo la curva v (cioè $v = \text{cost}$)

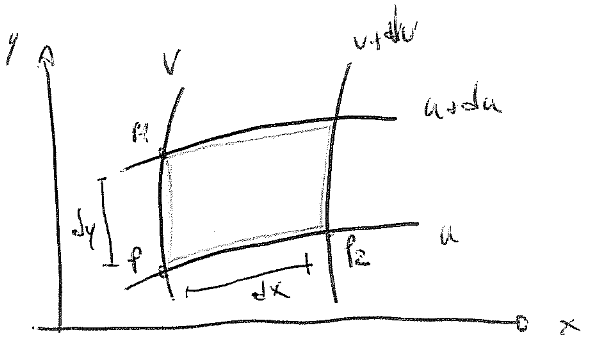
$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, \text{cost}) \\ y = \varphi_2(u, \text{cost}) \end{cases} \Rightarrow P_1 = \left(x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du, \; y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du \right)$$

P_2 è il punto P che si muove lungo la curva u (cioè $u = \text{cost}$)

$$\begin{cases} x = \varphi_1(\text{cost}, v) \\ y = \varphi_2(\text{cost}, v) \end{cases}$$

$$P_2 = \left(x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv, \; y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \right)$$

Se du e dv sono "piccoli":



... le curve si confondono con i segmenti.
Quindi l'area del dominio INFINITESIMO $\simeq dx\,dy$

Ma quest'area è anche = il doppio dell'area del triangolo $\underline{P P_1 P_2}$

$$\Rightarrow \quad dx\,dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du & y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du & 1 \\ x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv & y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv & 1 \end{vmatrix}$$

NB Area di un triangolo avente per vertici (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

NB il determinante di una matrice quadrata A NON CAMBIA se ad una riga $\underline{r}$ di A si sostituisce $\underline{r} + \rho\, \underline{s}$, dove $\underline{s}$ è un'altra riga arbitraria e $\rho \in \mathbb{R}$.

Quindi:

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv \qquad \underline{\text{OK}}!$$

Ritorniamo ad Analisi 1:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$$

$dx = \phi'(t)\, dt$

L'analogo bidimensionale della formula

$$dx = \phi'(t)\, dt$$

è allora:

$$dx\,dy = |J(u,v)|\, du\, dv.$$

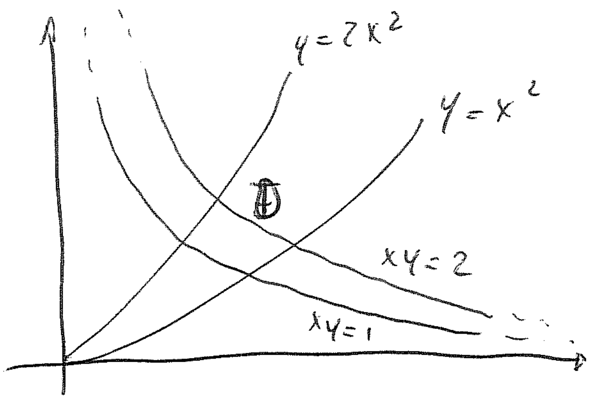
$\boxtimes$

Spesso alcuni cambiamenti di variabili vengono suggeriti in maniera naturale dalla geometria degli insiemi del piano su cui si deve operare. Vediamo qualche esempio.

(ES) (Tratto dal Marcellini - Sbordone ma modificato) (A23)

Calcolare $\iint_D xy \, dx \, dy$

con D insieme dei punti ~~racchiusi~~ del piano racchiuso fra le parabole $y = 2x^2$, $y = x^2$ e le iperboli $xy = 1$, $xy = 2$.

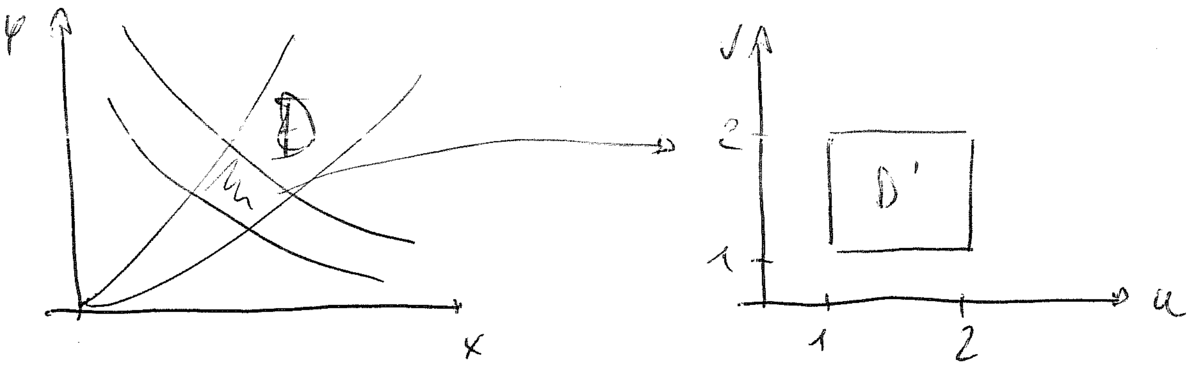


D non è un DOMINIO NORMALE!

$\Rightarrow$ operiamo un cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2 \end{array}$$

$$D' = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le u \le 2, \ 1 \le v \le 2 \}$$



D viene trasformato in un quadrato!!

$$\text{Sost} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{u}{v}} = \varphi_1(u,v) = u^{1/3}\, v^{-1/3} \\[2ex] y = \sqrt[3]{u^2 v} = \varphi_2(u,v) = u^{2/3}\, v^{1/3} \end{cases}$$

$$dx\,dy = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{matrix} \right| \, du\, dv$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{v^{-1/3}}{3}\, u^{-2/3} , & \dfrac{2v^{1/3}}{3}\, u^{-1/3} \\[2ex] -\dfrac{u^{1/3}}{3}\, v^{-4/3} , & \dfrac{u^{2/3}}{3}\, v^{-2/3} \end{matrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot v^{-1} + \frac{2}{9} v^{-1}$$

$$= \frac{1}{3v}$$

$$\Rightarrow \iint_D xy\, dx\, dy = \int_1^2 \int_1^2 u \cdot \frac{1}{3v}\, du\, dv = \ldots$$

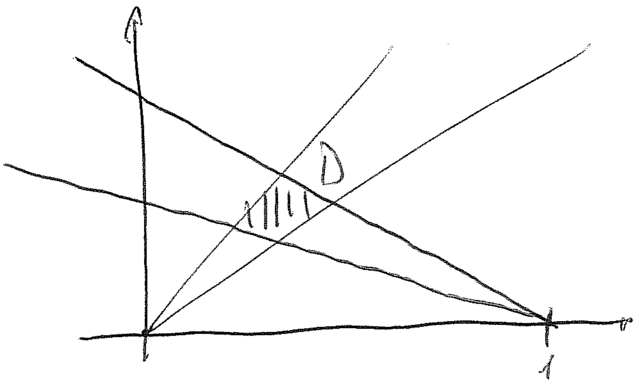
X CASA

(A25)

(ES) $\iint_D \frac{x}{y^2}\, dx\, dy$ Tratto da Marcellini - Sbordone

D regione di piano compresa tra le rette

$y = x$, $y = 2x$ e le rette $y + x = 1$, $x + 2y = 1$



NB
$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = \frac{y}{1-x} \end{cases} \quad \text{-----}$$

Cosa succede se cadono le ipotesi, α) β) γ) (A26)

del TEOREMA precedente? (LEZIONE 14/03)

Consideriamo, per es., il caso delle coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \, , \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

α) vale ovvia, β) no, infatti:

$$|J(\rho,\vartheta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\sin\vartheta) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

$|J|$ può annullarsi!

Anche su γ) abbiamo problemi (ci sono eccezioni alla biunivocità)

Per es, se fissiamo $\rho = 1$:

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \vartheta = 2\pi \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

STESSO PUNTO!

Tuttavia, un risultato analogo al punto III del TEOREMA (lez. 14/03) continua a valere anche per le coordinate polari.

Cioè:

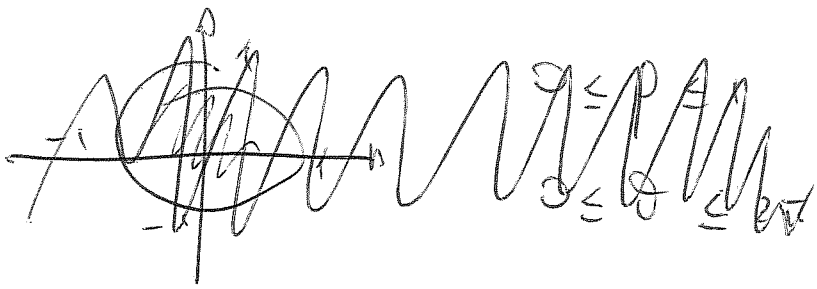
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

ρ è proprio $= |J(\rho,\vartheta)|$

ES N.S.

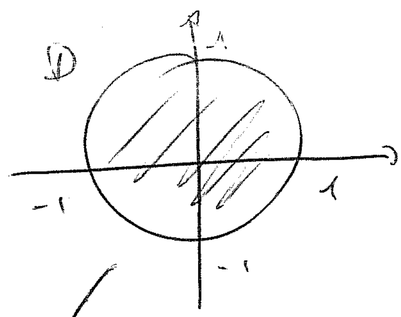
$$\iint_D (x^2+y^2)\left[1-\sqrt{x^2+y^2}\right]dx\,dy$$

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$$



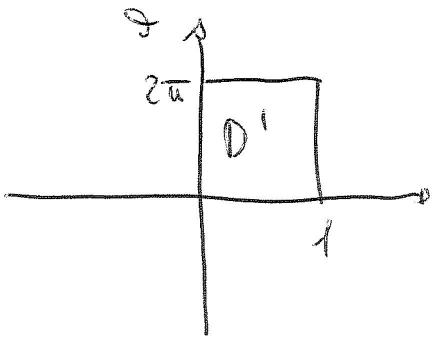
[DOMANDA (x casa): SARESTE IN GRADO DI CALCOLARE L'INTEGRALE USANDO LE FORMULE DI RIDUZ. PER DOMINI NORMALI (lez. 14/03)?]

COORDINATE POLARI



CERCHIO
DI CENTRO $O(0,0)$
e $R = 1$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2(1-\rho)\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$= 2\pi\int_0^1(\rho^3-\rho^4)\,d\rho$$

....

ES M.S.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2x \le 0\}$$

D è il cerchio di raggio 1 e centro $(1,0)$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \quad \rho^2 - 2\rho\cos\vartheta \le 0$$

$$0 \le \rho \le 2\cos\vartheta$$

A23

$2\cos\vartheta \geq 0 \Rightarrow \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\vartheta} \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \cos^3\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \left(1-\sin^2\vartheta\right) d\vartheta = \dots$$

X CASA

DA COMPLETARE

OSS

Qualcuno di voi potrebbe chiedermi: il cerchio è di centro $(1,0)$ e $r=1$; non potrei applicare le coordinate decentrate!

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\vartheta \\ y = 0 + \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{matrix}$$

inoltre $|J(\rho,\vartheta)| = \rho$ anche per le decentrate

X CASA PROVARE A SOSTITUIRE LE COORD. POLARI DECENTRATE NELL'INT. DOPPIO $\rightarrow$

$\rightarrow$ Cosa ottenete?