A11

• $\gamma(y)$ $\delta(y)$ continue in $[c,d]$ t.c.

$$\gamma(y) \leq \delta(y) \qquad \forall\, y \in [c,d]$$

$$\Rightarrow \quad E = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$$

ins. normale risp. all'asse y

MISURA O AREA DI D.

SECONDA LEZIONE

(14/03/17)

$$m(D) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]\, dx$$

E :

$$m(E) = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)]\, dy$$

Teorema (integrabilità di f. continue)

(A12)

Sia D un DOMINIO NORMALE del piano e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funz. continua. Allora $\exists$ un unico numero reale c t.c.

$$s(P_1) \le c \le S(P_2)$$

$\forall$ coppia di partizioni P_1 e P_2 di D in domini normali.

~~Inoltre~~ La def:

$$c = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

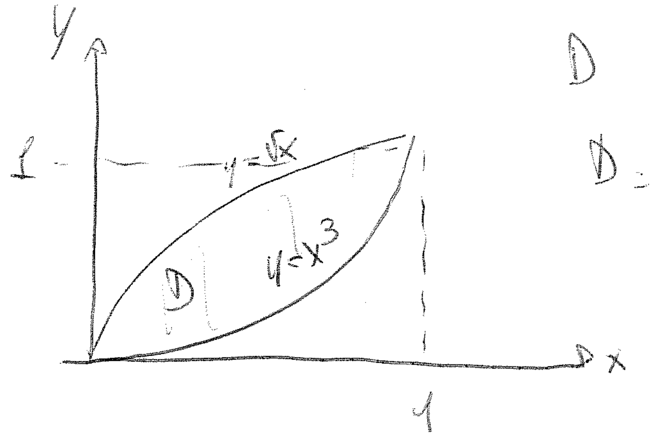
ES) ~~Consideriamo un dominio normale risp all'asse x:~~

~~$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^3$~~

ES) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}\}$

$m(D)$?

$$m(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\, dx = \dots \ 5/12$$



D è anche normale risp. all'asse y!

$D = \{ \dots \ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt[3]{y} \}$.

$$m(D) = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y^2)\, dy = \dots = 5/12$$

FORMULE DI RIDUZ PER GLI INT. DOPPI

1) $D = \{ (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \,,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

$\forall\ f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

2) $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] \,,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}$

$$\Rightarrow \iint_E f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$

$\forall\ f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

CASO PARTICOLARE

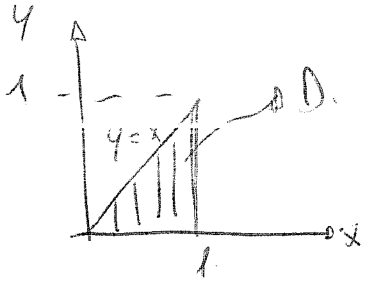
D rettangolo, $f(x,y)$ a variabili separabili

ES

$$\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy \qquad D = [1,2] \times [3,4]$$

. . .

(ES) $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$



A14

Se lo vediamo come un DOMINIO NORMALE RISP. all'asse x:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^x 2y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right]dx = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\int_0^1 \left.(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^x dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (2x^2)^{3/2} - (x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]\int_0^1 x^3\,dx$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{12}$$

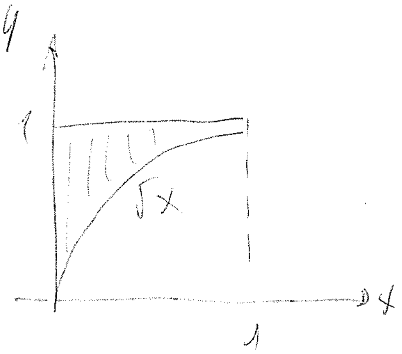
~~Oss~~ X CASA

1) Rifare l'esercizio notando che D si può esprimere anche come DOMINIO NORMALE RISP. all'asse y.

2) Cosa si può notare, in termini di difficoltà dei ~~conti~~ calcoli necessari per il punto (1), rispetto al procedimento svolto in ~~Aula~~ Aula?

5) $\iint_D e^{y^3}\, dx\, dy = ?$

$$D = \{ 0 \le x \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 1 \}.$$



$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy \right] dx$$

$$\int e^{y^3}\, dy \qquad t = y^3 \Rightarrow dt = 3y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{e^t}{t^{2/3}}\, dt = ?.?$$

Ma D si può considerare anche come dominio <u>normale risp. all'asse y</u>. : $\cancel{D = \{0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 0\}}$

$$D = \{ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2 \}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx \right] dy = \int_0^1 e^{y^3} y^2\, dy = \frac{1}{3} e^{y^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$$

Oss

$$\text{mis}(D) = \iint_D 1 \, dx\, dy$$

DIM

Con D NORMALE RISP. all'asse x ....

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INT. DOPPI

- Calcolo degli int. di funz. di 1 variabile

$\downarrow$

integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$x = \varphi(t)$ funz. derivabile e monotona da $\varphi^{-1}([a,b])$ ad $[a,b]$

- E negli integrali doppi?

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Tale cambiamento è def. da formule del tipo:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u,v) \\ y &= \varphi_2(u,v) \end{aligned} \qquad (*)$$

Diremo che, mentre $(x,y) \in D \Rightarrow (u,v) \in D'$

la trasf. di coordinate $(*)$ porta $(u,v) \in D'$ in $(x,y) \in D$

Affinché questo sia possibile, facciamo le seguenti ipotesi:

α) φ_1, φ_2 ~~de~~ sono C^1 in D'.

β) $|J(u,v)| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{matrix} \right\| \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D'$

γ) $(*)$ stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti ~~dei due campi A~~ di D e D'.

TEOREMA

Nelle ipotesi α) β) γ): I) Comunque si prende un DOMINIO $D' \subset \mathbb{R}^2$, le (*) gli fanno corrispondere in $\mathbb{R}^2$ un DOMINIO D mutando punti interni di D' in punti interni di D, e punti di $\partial D'$ in punti in ∂D.

II) Se D' è limitato e misurabile, allora anche D è limitato e misurabile, e si ha:

$$\text{mis}\, D = \iint_{D'} |J(u,v)| \, du \, dv .$$

III) Per ogni $f(x,y)$ continua in D risulta:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)] \, |J(u,v)| \, du \, dv$$

Diamo una spiegazione intuitiva del punto (III)