INT DOPPI

PRIMA LEZIONE (A1)

(28/02/17)

- Dove eravamo rimasti (Analisi I):

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funz. continua $\quad (f(x) \geq 0)$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

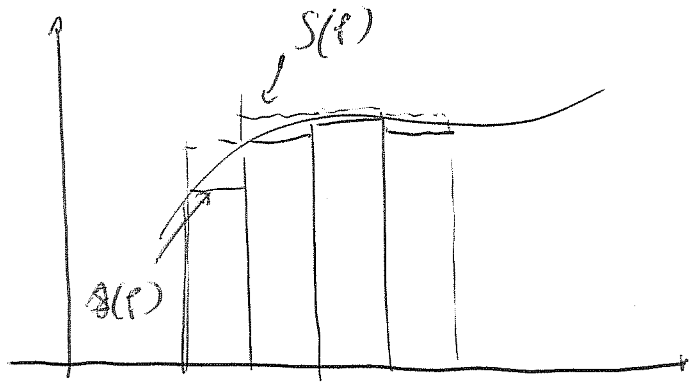
$m_k = \min \{ f(x): x \in [x_{k-1}, x_k] \}$

$M_k = \max \{ \_\_\_\_\_\_\_\_ \}$.

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE dell'intervallo (a,b)

$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ SOMMA INTEG. INFERIORE

$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$ " " SUPERIORE



~~INT DOPPI~~

A (1 bis)

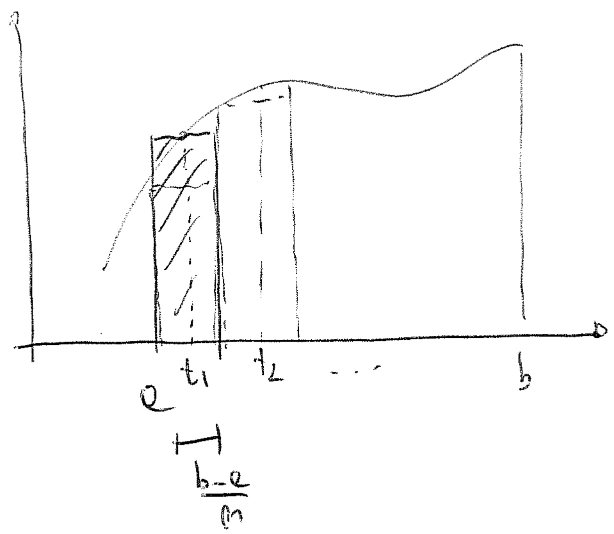
- ~~Dove eravamo rimasti:~~

~~$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funz. continua~~

$s(P) = S(P)$

~~allora~~

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_k)$$



Se $f(x) \geq 0$

$\Downarrow$

AREA = SOMMA DI AREE

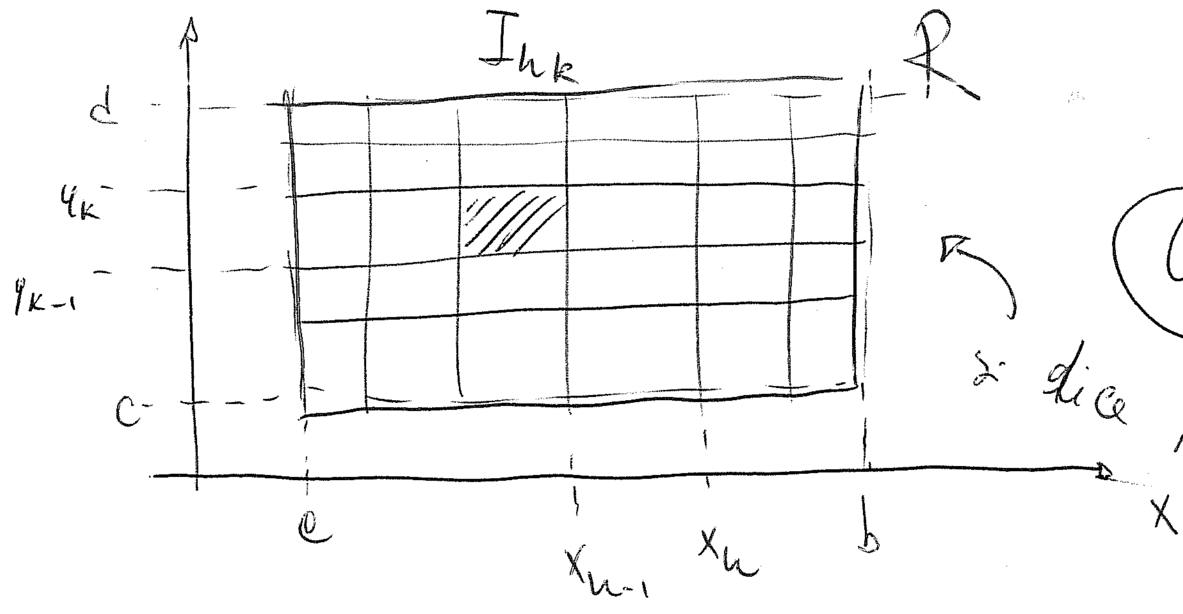
"PICCOLE"

- Estendiamo questo concetto all'Analisi 2:

$$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

$$z = f(x,y)$$

A_2



Caso I

si dice partizione di R

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b.$$

$$y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$\Rightarrow \quad x_h = a + h\,\frac{b-a}{m}$$

$$y_k = c + k\,\frac{d-c}{m}$$

$\boxed{k = 0, 1, \dots, m}$

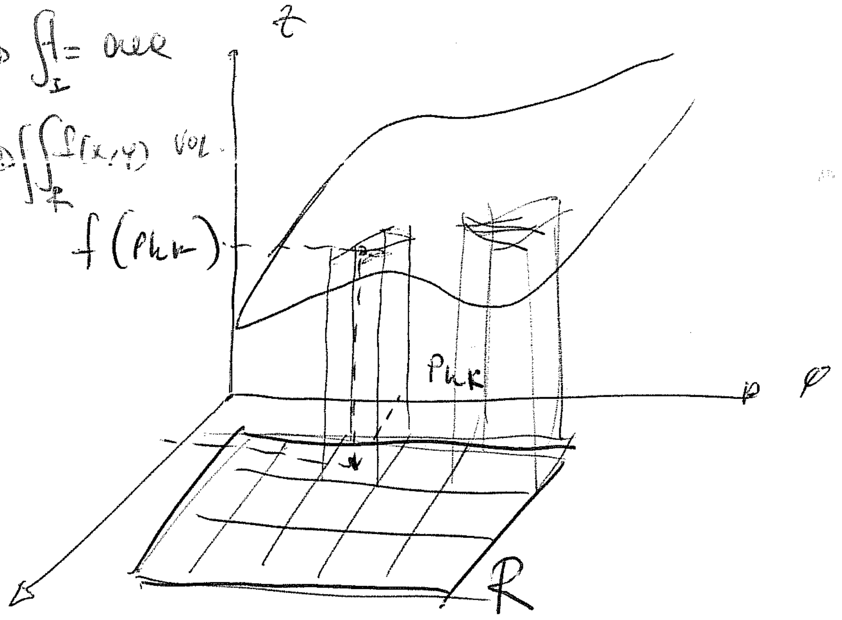
$$x_h - x_{h-1} = \frac{b-a}{m}$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{d-c}{m}.$$

$$\text{Area } \underbrace{|I_{hk}|}_{\text{o mis } I_{hk}} = \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{m} = \frac{(b-a)(d-c)}{m^2}$$

Se $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_I f =$ area

Se $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint_R f(x,y)$ vol.



(A3)

Se $f(x) \geq 0 \Rightarrow$ Volume sotteso dalla $f(x,y)$

è somma di volumi più piccoli

~~$\lim_{n\to+\infty} \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}| f(P_{hk}) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$~~

~~mis I_{hk}~~ ~~INTEGRALE DOPPIO~~

DOMANDA

Perché proprio un rettangolo?

(lo sappiamo "misurare")

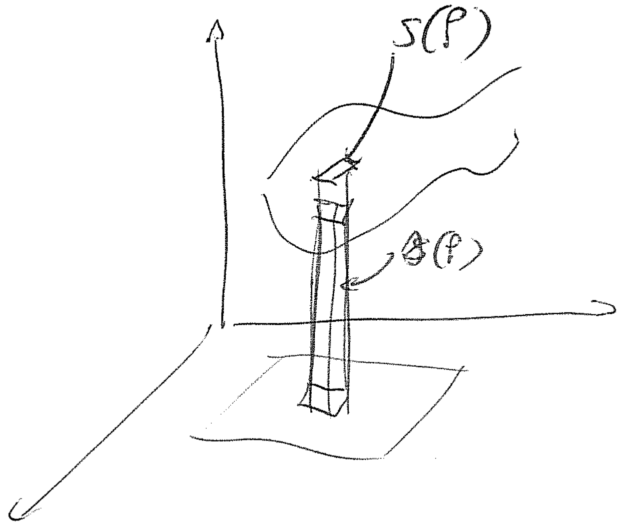
Come abbiamo fatto per $\int$ in 1 variabile, allora:

$$s(P) = \sum_{h,k=1}^{n} \text{mis}\, I_{hk}\, m_{hk}$$ somma integ. inf.

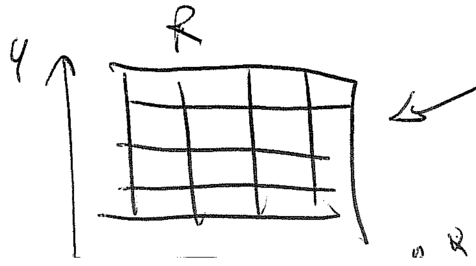
$$S(P) = \sum_{h,k=1}^{n} \text{mis}\, I_{h,k}\, M_{h,k}$$ somma integ. sup.

$$m_{hk} = \min \{ f(x,y) \,,\ (x,y) \in \overbrace{[x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k]}^{I_{hk}} \}$$

$$M_{h,k} = \max \{ \underline{\qquad\qquad\qquad} \}$$



P è la partizione del rettangolo



A5

$\{s(P_1)\}$, $\{S(P_2)\}$ insiemi delle somme (inf e sup)

al variare delle partizioni P_1 e P_2 del dominio rett. R, si ha che:

$$s(P_1) \le S(P_2) \quad \forall\, P_1, P_2 \text{ partiz. rettang. di } R.$$

Tali insiemi sono anche CONTIGUI, cioè ammettono un UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE

$\Rightarrow$ cioè $\exists$ un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$s(P_1) \le c \le S(P_2) \quad \forall\, P_1\ P_2 \text{ partiz. rett. di } R.$$

$\Rightarrow$ questo elemento e si chiama

integrale doppio di $f(x,y)$ su R:

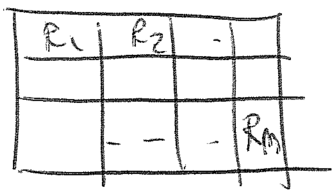
$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = e}$$

PROPRIETÀ

1) linearità $\iint_R [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \dots$

2) monotonia; se $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_R g \dots$

3) 

$R = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$

$\{R_1 \dots R_n\}$ una partizione di R.

$$\Rightarrow \boxed{\iint_R f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f}$$

A6 BIS

5) PROP.: TEOREMA DELLA MEDIA

$$f(x,y),\ g(x,y) \in C^0(R)$$

$$g(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R$$

$$m = \min\{ f(x,y) : (x,y) \in R \}$$

$$M = \mathrm{MAX}\{ \quad\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \}.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m \iint_R g(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_R f g \leq M \iint_R g}$$

Vale anche:

5bis) $$\boxed{\underline{m \,\mathrm{mis}(R) \leq \iint_R f \, dx\, dy \leq M \,\mathrm{mis}(R)}}$$

$$\Downarrow$$

Non la fa adesso!

Falla dopo che avrai dim.

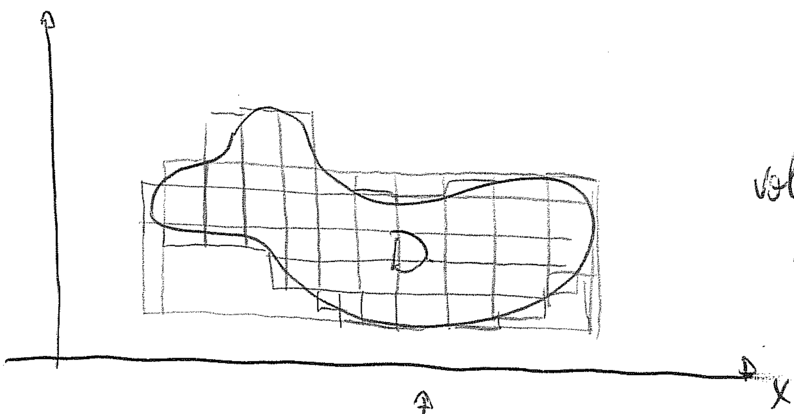
che $\iint_D dx\, dy = \mathrm{mis}\, D$

INSIEMI CHIUSI E LIMITATI DI $\mathbb{R}^n$ =

= COMPATTI DI $\mathbb{R}^n$.

CASO $\underline{\text{II}}$: COMPATTI MISURABILI DI $\mathbb{R}^n$.

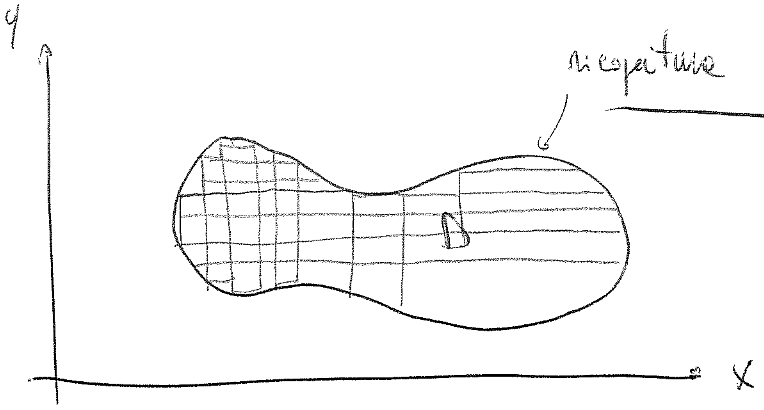
Che cos'è un ~~insieme~~ COMPATTO misurabile?



Supponiamo di voler calcolare la MISURA di D (mis D) cioè in questo caso l'area della superficie.

ricopritura esterna di D

ricopritura interna di D.



~~Ins un~~ Un insieme è MISURABILE se la misura della ricopritura esterna e la misura di quella interna coincidono (al limite)

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ha le stesse proprietà di $\iint_R$: linearità, monotonia, partizioni... media...

partizione di D = $\{D_1 \dots D_n\}$ in ~~...~~ n compatti misurabili,

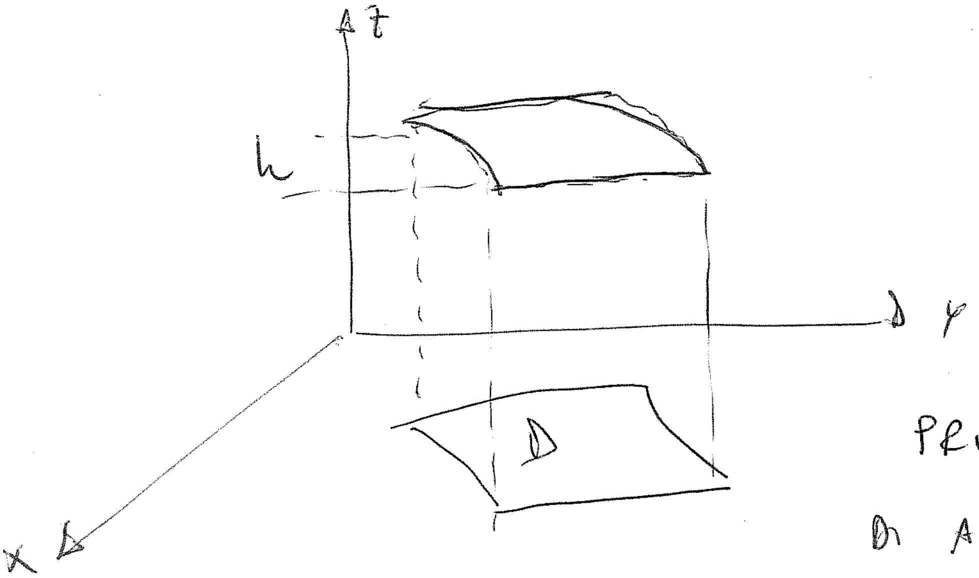
con $\{D_1 \dots D_n\}$ a due a due PRIVI DI PUNTI INTERNI in comune e tale che $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$.

~~(ES) ... D DOMINIO DI $\mathbb{R}^2$ COMPATTO~~

RISCRIVERE TUTTE LE PROP. PER D INVECE DI R.

ES COMPATTO MISURAB. DI $\mathbb{R}^2$: D.

$f(x,y) = h > 0$



PRISMA RETTO DI ALTEZZA h, AVENTE PER BASE IL COMPATTO MISURAB D

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = ? = \iint_D h\,dx\,dy$$

Pur ignorando le regole di integrazione più banali, grazie al signif geometrico dell' $\iint_D$ possiamo dire che:

$$\iint_D h\,dx\,dy = \underbrace{h \cdot mis(D)}$$

Facciamo degli esempi di insiemi COMPATTI MISURABILI:

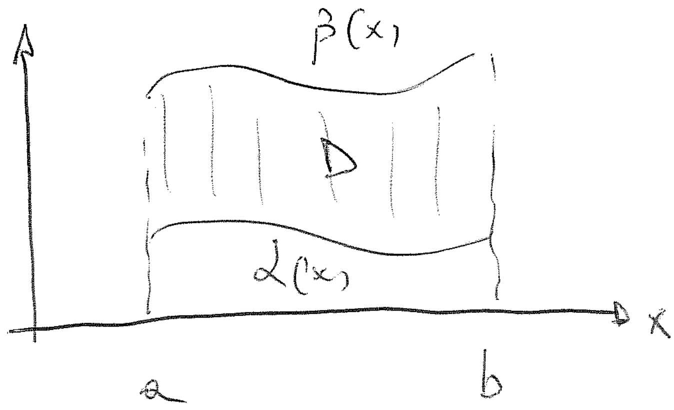
- RETTANGOLI
- <u>DOMINI NORMALI</u>

• $\alpha(x)$ $\beta(x)$ continue in $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a<b$ t.c.

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \ : \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

DOMINIO NORMALE RISP. ALL'ASSE X



~~γ(y) δ(y) continue~~